**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA**
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**
*COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA*

**XXVIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS**
**SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2024**

# MÉTODO DO TRIEDRO MÓVEL E SUA APLICAÇÃO NA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE BONNET.

**Ian Lemos Freitas[1]; Claudiano Goulart[2]**
1. Bolsista – Iniciação Cientifica/CNPq, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: ianlemosfreitas321@gmail.com.br
2. Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: cgoulart@uefs.br

**PALAVRAS-CHAVE:** Teorema de Bonnet; Triedro Móvel; Superfícies de curvatura constante
.

## INTRODUÇÃO

Neste trabalho foi realizado um estudo acerca do Método do Triedro Móvel associado a uma superfície e sua aplicação na demonstração do Teorema de Bonnet. Trata-se de um resultado importante em matemática pura, mais especificamente, na área de geometria diferencial, que relaciona superfícies de curvatura média constante e superfície de curvatura Gaussiana constante. A Geometria Diferencial se dedica ao estudo de curvas e superfícies regulares utilizando resultados de diversas áreas tais como Geometria Analítica, Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral. Topologia, Álgebra e Análise Matemática.

## METODOLOGIA (ou equivalente)

A metodologia utilizada foi aquela que geralmente se usa em trabalhos na área de matemática pura, a saber, estudos individuais de tópicos selecionados e reuniões/orientações semanais com o professor orientador para a discussão dos conteúdos estudados e para sanar eventuais dúvidas. Ressaltamos que, durante o desenvolvimento do projeto, foi realizada uma análise bibliográfica de duas obras clássicas para o estudo de tópicos de Geometria Diferencial. São elas: Introdução a Geometria Diferencial (TENENBLAT, 2008) e Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies (CARMO, 2014).

## RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

Após a compreensão dos conceitos preliminares de Geometria Diferencial, iniciamos os estudos sobre as Formas Diferenciais e o Método Triedro Móvel, procurando aprender as definições matemáticas e sua visão geométrica. Em seguida, se utilizando dos teoremas, proposições e propriedades relacionadas a este método, foi possível compreender detalhadamente a sua aplicação na demonstração do seguinte teorema

**Teorema de Bonnet:** Para cada superfície de curvatura média constante igual a $c \neq 0$, sem pontos umbilicos e parabólicos, podemos associar duas superfícies paralelas, uma de curvatura gaussiana igual a $4c^2$ e a outra de curvatura média $-c$. Reciprocamente, para cada superfície de curvatura gaussiana constante positiva igual a $4c^2$ e sem pontos umbílicos, podemos associar duas superfícies paralelas cujas as curvaturas médias são iguais a $c$ e $-c$, respectivamente.

Na demonstração apresentada por (TENEBLAT, 2008) foi sugerido construir as superfícies paralelas $\underline{X} = X + ae_3$, considerando as constantes $a = \frac{1}{2}c$ e $\frac{1}{c}$ no primeiro momento e as constantes $a = \pm\frac{1}{2c}$, no segundo momento. Inicialmente percebe-se que, de fato, com a utilização do triedro móvel, a demonstração não é complicada visto que (TENEBLAT, 2008) já apresenta as constantes que conduziram a veracidade da afirmação.

Partindo com um outro direcionamento para a demonstração deste resultado, buscamos compreender o porquê da constante sugerida através de alguns questionamentos: "É a única forma que funciona?" e "Como chegar a essa constante?". Após alguns cálculos, conseguimos responder afirmativamente a estes questionamentos. A partir dos questionamentos sobre o teorema desenvolvemos nossa pesquisa. Em uma primeira análise observamos que, no primeiro caso, a inexistência de pontos umbílicos e parabólicos na superfície permitiu que o cálculo das curvaturas fosse realizado sem gerar uma indeterminação. Além disto, o mesmo resultado se obteve para a recíproca. Quanto a determinação da constante foi feito o processo de resolver a equação de curvatura média e gaussiana procurando isolar o valor da constante, com isso percebemos que uma " boa candidata" seria as constantes sugeridas, mas não as únicas. Finalizando esta seção, consideremos o seguinte exemplo de aplicação do teorema de Bonnet:

Exemplo: Dada uma constante real $a$ tal que $0 < a < 1$ , a superfície de rotação (Figura 1) definida por:

$$X(u,v) = \left(acosu\ cosv, a\ cosu\ senv, \int_0^u \sqrt{1 - a^2 sen^2 t}\ dt\right),$$

onde $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, v \in R$

possui curvatura média constante. Além disto, usando o Teorema de Bonnet, as superfícies

$X_1(u,v) =$
$\left(acosu\ cosv, a\ cosu\ senv, \int_0^u \sqrt{1 - a^2 sen^2 t}\ dt\right) + \frac{1}{2}(x_1(u,v), y_1(u,v), z_1(u,v))$ e

$\bar{X}(u,v) =$
$\left(acosu\ cosv, a\ cosu\ senv, \int_0^u \sqrt{1 - a^2 sen^2 t}\ \ dt\right) - \frac{1}{2}\left(\mathrm{x}_1(u,v), y_1(u,v), z_1(u,v)\right)$tal que

$x_1(u,v) =$

$$\frac{-acosu\ cosv\sqrt{1-a^2sen^2u}}{\sqrt{\left(-acosu\ cosv\sqrt{1-a^2sen^2u}\right)^2+\left(-acosu\ senv\sqrt{1-a^2sen^2u}\right)^2+(\ -a^2senu\cos^2 v-a^2senucos\cos usen^2v)^2}}$$

$\mathrm{y}_1(\mathrm{u},\mathrm{v}) =$

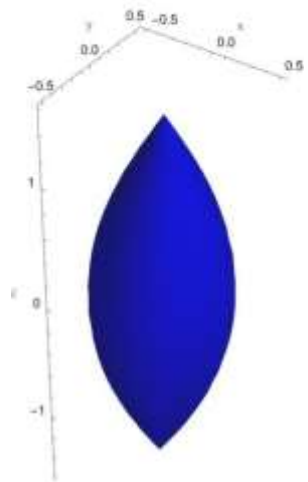
$$\frac{-\mathrm{acosu\ senv}\sqrt{1-\mathrm{a}^2\mathrm{sen}^2\mathrm{u}}}{\sqrt{\left(-\mathrm{acosu\ cosv}\sqrt{1-\mathrm{a}^2\mathrm{sen}^2\mathrm{u}}\right)^2+\left(-\mathrm{acosu\ senv}\sqrt{1-\mathrm{a}^2\mathrm{sen}^2\mathrm{u}}\right)^2+(\ -\mathrm{a}^2\mathrm{senu}\cos^2\mathrm{v}-\mathrm{a}^2\mathrm{senucos}\cos\mathrm{usen}^2\mathrm{v})^2}}$$

$z_1(u,v) =$

$$\frac{-a^2senu\ cos^2v-a^2senucos\ u\ sen^2v}{\sqrt{\left(-acosu\ cosv\sqrt{1-a^2sen^2u}\right)^2+\left(-acosu\ senv\sqrt{1-a^2sen^2u}\right)^2+(\ -a^2senu\ cos^2v-a^2senucos cos\ u\ sen^2v)^2}}$$

possuem curvatura Gaussiana constante.

Figura 1.



Fonte: Imagem produzida pelo autor.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

O programa foi importante para a minha formação e proporcionou uma introdução acerca da pesquisa em matemática pura. Além disso, foi possível obter um amadurecimento em relação a conteúdos previamente estudados ao longo do curso de graduação, que após a participação no programa de iniciação científica foram interpretados de outra maneira, com novas aplicações.

## REFERÊNCIAS

TENEBLAT, KETI. **Introdução a Geometria Diferencial.** 2ª Edição. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria Diferencial de Curvas e Superficies.** 5ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2014.