UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXVIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2024

IDENTIFICAÇÃO DE ANÉIS DE QUATÉRNIOS DE DIVISÃO COMO SUBANÉIS DE ANÉIS DE GRUPO SOBRE O CORPO DOS RACIONAIS

Ana Libni Santos Vasconcelos Ferreira[1]; Maurício de Araujo Ferreira[2]
1. Bolsista – PIBIC/FAPESB, Graduanda em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: analibnivasconcelos@gmail.com
2. Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: maferreira@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Anéis de grupo, grupo dos quatérnios, álgebra de quatérnios.

INTRODUÇÃO

Este trabalho teve como objetivo identificar anéis de quatérnios de divisão como subanéis de anéis de grupo sobre o corpo dos racionais. Para alcançar esse objetivo, foi fundamental o estudo de propriedades algébricas dos anéis de grupo, dos ideais de aumento, e, em particular, grupos de ordem pequena, como quatérnios, diedrais, cíclicos e do produto central de grupos, além das álgebras de quatérnios nos corpos dos reais e racionais. Assim, o foco principal foi a identificação de anéis de quatérnios generalizados $(u,v)_{\mathbb{Q}}$, em sua forma mais geral, como subanel de anéis de grupo.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A pesquisa teórica visou compreender as propriedades das estruturas algébricas e analisar casos particulares para identificar padrões aplicáveis a contextos mais amplos. Utilizamos o software *Groups, Algorithms, Programming* (GAP) para explorar grupos abstratos, facilitando cálculos extensos e a interpretação dos resultados. O laboratório LABMAT do DEXA foi essencial para acessar periódicos e ferramentas. As principais referências foram Humphreys (1996), Milie e Sehgal (2002), Silva (2021) e Oliveira (2023), que embasaram o desenvolvimento da pesquisa e suas conclusões.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

Definição: Seja G um grupo finito e R um anel comutativo com unidade, dessa forma o anel de grupo, denotada por RG, é definido como o conjunto de todas as combinações lineares da forma:

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g,$$

onde $a_g \in R, g \in G$.

São definidas as operações entre dois elementos α e β em RG:

i) Soma

$$\alpha + \beta = \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g.$$

ii) Produto

$$\alpha\beta = \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) + \left(\sum_{h \in G} b_h g \right) = \sum_{g,h \in G} (a_g b_h) gh.$$

iii) Produto Escalar

$$\varphi \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \left(\sum_{g \in G} (\varphi a_g) g \right)$$

O conjunto RG, com as operações definidas acima, é chamado de anel de grupo de G sobre R. Além disso, dados dois elementos $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ e $\beta = \sum_{g \in G} b_g g \in RG$, têm-se que $\alpha = \beta$, se e somente $a_g = b_g$ se para todo $g \in G$. Para todo $\varphi \in R$. Deste modo, é estabelecido que se R é corpo, então RG é um espaço vetorial sobre R que tem base G. No caso em que R é corpo, RG também é chamado de álgebra de grupo de G sobre R.

Definição: Seja K um corpo, onde $car(K) \neq 2$ e sejam $u, v \in K$ com $u, v \neq 0$. Definimos o anel de quatérnios generalizados da seguinte forma:

$$(u, v)_K = \{a + b_i + c_j + d_k \mid a, b, c, d \in K\}.$$

Dados $\alpha = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $\beta = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ pertecentem a $(u, v)_K$, a soma é definhada como:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

A multiplicação é definida de maneira distributiva e o produto das unidades básicas $1, i, j, k$ é definido a partir da seguinte tábua multiplicativa:

$$i^2 = u, \qquad j^2 = v, \quad ij = -ji = k.$$

É importante ressaltar que os quatérnios generalizados nem sempre formam um anel de divisão, pois isso depende dos valores atribuídos a u e v. Um resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em Silva (2022), afirma que, quando $(u, v)_K$ não é um anel de divisão, ele é isomorfo ao anel de matrizes.

Sejam G e H grupos com Z um subgrupo do centro de G e W um subgrupo do centro de H. Suponha que exista um isomorfismo $\vartheta: Z \longrightarrow W$. Consideremos $X = \{(x, \vartheta(x)^{-1}) : x \in Z\}$. Sendo assim, dado $z \in X, z = (x, \vartheta(x)^{-1})$, onde $x \in Z$ e $\vartheta(x)^{-1} \in W$. Como $Z \leq Z(G)$ e $W \leq Z(H)$, então $Z \times W \subset Z(G \times H)$. Portanto, $X \subset Z(G \times H)$.

Um outro fato interessante sobre X é que por propriedade de homomorfismo, temos que X é um subgrupo normal de $G \times H$. De fato, para quaisquer $a = (x, \vartheta(x)^{-1})$ e $b = (y, \vartheta(y)^{-1})$ em X, o produto $ab = (x, \vartheta(x)^{-1}) * (y, \vartheta(y)^{-1}) = (xy, \vartheta(xy)^{-1}) \in X$. Assim, $X \leq G \times H$.

Além disso, como $X \subset Z(G \times H)$, temos que $aX = Xa$, qualquer que seja $a \in X$. Portanto, X é subgrupo normal de $G \times H$.

Definição: O grupo quociente ${G \times H}/_{X}$ é chamado produto central de G com H por ϑ, denotado por $G *_{\vartheta} H$. Nos casos onde o isomorfismo ϑ estiver claro, escrevemos simplesmente $G * H$.

Seja G o grupo de ordem 16 gerado pelo produto central de K_8 com C_4, onde C_4 é o grupo cíclico de ordem 4. Logo, $G = < a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2, a^4 = b^4 = c^4 = 1, ba = a^3 b, ac = ca, bc = cb >$. Deste modo, o anel de grupo do grupo G, sobre o corpo dos números racionais é definido por

$$\mathbb{Q}G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \,:\, a_g \in \mathbb{Q}, g \in \, G \right\}$$

Teorema: $(-1, p)_{\mathbb{Q}}$ *é isomorfo a um subanel de* $\mathbb{Q}G$, *onde* $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Esboço de demonstração: Considere uma aplicação ρ: $(-1, p)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}G$ que é definida nos elementos da base da seguinte forma:

$$1 \longmapsto \left(\frac{1 - a^2}{2}\right);$$
$$i \longmapsto b\left(\frac{1 - a^2}{2}\right);$$
$$j \longmapsto \left(ca\frac{(p+1)}{2} + ab\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{1 - a^2}{2}\right);$$
$$k \longmapsto \left(-cab\frac{(p+1)}{2} + a\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{1 - a^2}{2}\right).$$

Verifica-se que essa aplicação é uma transformação linear que leva base em conjunto L.I. Portanto, ρ é um monomorfismo de espaços vetoriais e um monomorfismo de anéis, pois preserva as operações do produto. Deste modo, concluímos que $(-1, p)_{\mathbb{Q}}$é um subespaço de dimensão 4 e um subanel de $\mathbb{Q}G$.

Corolário: *Se* p *é um primo tal que* $p \equiv 3 \bmod 4$, *então* $(-1, p)_{\mathbb{Q}}$ *é um anel de quatérnio com divisão isomorfo a um subanel de* $\mathbb{Q}G$.
A prova desta demonstração pode ser encontrada em Oliveira (2023).

Seja G o grupo de ordem 32 gerado pelo produto central de K_8 com D_8, onde D_8 é o grupo diedral de ordem 8, $D_8 = \{\, d, e : d^4 = e^2 = 1, ed = d^3 e\}$.
Logo, $G = K_8 *_{\square} D_8 = < x, y, z, w \mid x^4 = w^2 = z^2 = 1,\ x^2 = y^2,\ yx = x^3 y,\ zx = x^3 z,\ wz = x^2 zw,\ xw = wx,\ yw = wy,\ yz = zy >$.

Tomemos o produto direito de G com C_4, onde C_4 é o grupo cíclico de ordem 4. Assim obtemos o grupo $G \times C_4$ de ordem 128. Seja $Z(G) = \{1, x^2\}$ e $W = \{1, c^2\}$. Definindo uma aplicação $\mu: Z(G) \rightarrow W$ tal que:

$$\mu(1) = 1 \quad \text{e} \quad \mu(x^2) = c^2$$

Sendo assim, como definido anteriormente, temos o conjunto $X = \{\,(1,1), (x^2, c^2)\}$. Portanto, o grupo quociente ${G \times C_4}/_{X}$ é chamado produto central de G com C_4 por μ, denotado por $G *_{\mu} C_4$. Como o grupo $G \times C_4$ é de ordem 128, o produto central $G *_{\mu} C_4$ tem ordem 64.

Deste modo, chamemos de L o grupo de ordem 64, onde:

$$L = G *_\mu C_4 = < x_1, x_2, x_3, x_4, c \mid x_1^4 = c^4 = x_4^2 = x_3^2 = 1, \qquad x_1^2 = x_2^2 = c^2,$$
$$x_2x_1 = x_1^3x_2, \qquad x_3x_1 = x_1^3x_3, \qquad x_4x_3 = x_1^2x_3x_4,$$
$$[x_1, x_4] = [x_2x_4] = [x_3x_2] = 1, \qquad [x_i, c] = 1, \qquad para\ 1 \leq\ i \leq 4. >$$

Deste modo, o anel de grupo do grupo L, sobre o corpo dos números racionais é definido por:

$$\mathbb{Q}L = \left\{ \sum_{l \in L} a_l L : \ a_l \in \mathbb{Q}, l \in\ L \right\}.$$

E, a fim de simplificar a notação, tomaremos $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = w$, para $x_1, x_2, x_3, x_4 \in L$.

Teorema: $(u,v)_{\mathbb{Q}}$ *é isomorfo a um subanel de* $\mathbb{Q}L$, *onde* $u, v\ \in \mathbb{Q}\ \setminus\ \{0\}$.

Esboço de demonstração: Considere uma aplicação α: $(u,v)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}L$ que é definida nos elementos da base da seguinte forma:

$$1 \ \longmapsto \left(\frac{1-a^2}{2}\right);$$
$$i \ \longmapsto \left(x\left(\frac{u+1}{2}\right) + cxy\left(\frac{u-1}{2}\right)\right)\left(\frac{1-a^2}{2}\right);$$
$$j \ \longmapsto \left(zw\left(\frac{v+1}{2}\right) + z\left(\frac{v-1}{2}\right)\right)\left(\frac{1-a^2}{2}\right);$$
$$k \ \longmapsto \left(\left(x\left(\frac{u+1}{2}\right) + cxy\left(\frac{u-1}{2}\right)\right)\left(zw\left(\frac{v+1}{2}\right) + z\left(\frac{v-1}{2}\right)\right)\right)\left(\frac{1-a^2}{2}\right).$$

Verifica-se que essa aplicação é uma transformação linear que leva base em conjunto L.I. Portanto, α é um monomorfismo de espaços vetoriais e um monomorfismo de anéis, pois preserva as operações do produto. Deste modo, concluímos que $(u,v)_{\mathbb{Q}}$é um subespaço de dimensão 4 e um subanel de $\mathbb{Q}L$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa explorou a estrutura de anéis de grupo e quatérnios generalizados, focando em suas propriedades e definições. Como resultado principal, identificamos quatérnios generalizados $(u,v)_{\mathbb{Q}}$ como subanéis de anéis de grupo, estendendo o estudo para corpos arbitrários. Esse avanço abre novas possibilidades para investigações futuras com álgebras cíclicas e suas aplicações em diferentes contextos algébricos, ampliando o entendimento dessas estruturas.

REFERÊNCIAS

HUMPHREYS, J.F., A course in Group Theory. Oxford: University Press., 1996.

MILIES, C. P.; SEHGAL, S. K., An introduction to group rings. Algebras and applications. Volume 1. Springer, 2002.

SILVA, L. C., Extensão de escalares em álgebra de quatérnios. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2021.

OLIVEIRA, K. T. C. Identificando anéis de quatérnios generalizados como subanéis de anéis de grupo. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2023.