



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº 17.228 de 25/11/2016



PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIX SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS **SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2025**

Teorema da incompletude de Gödel: (re)elaborando uma demonstração com vistas à melhor compreensão pelos licenciandos em matemática

Virna Carneiro Gonzaga¹; Rosemeire de Fatima Batistela²

1. Virna Carneiro Gonzaga, PIBIC/FAPESB, MATEMATICA, e-mail: virnatech18@gmail.com

2. Rosemeire de Fatima Batistela, DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS, e-mail: rosebatistela@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Teorema da Incompletude de Gödel. Reelaboração. Licenciatura em Matemática.

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo principal reelaborar a demonstração do Teorema da Incompletude de Gödel de forma acessível para licenciandos em matemática, equilibrando o rigor matemático e a clareza expositiva. A justificativa baseia-se na análise de que as abordagens existentes tendem a dois extremos: ou são excessivamente técnicas, com notação pesada e definições difíceis, ou são excessivamente vagas, limitando-se a analogias filosóficas sem o rigor demonstrativo necessário.

A importância do assunto reside no fato de o Teorema de Gödel ser conteúdo do oitavo semestre da licenciatura, exigindo compreensão sólida por parte dos futuros professores. Entender a *Lógica Matemática* é fundamental para alcançar essa compreensão, pois fornece a base para desvendar a estrutura da demonstração, que utiliza métodos como a prova por contradição.

Partindo do estudo de quatro obras de referência Batistela (2017), Nagel e Newman (1973), Gusfield (2014) e Smullyan (1992), o trabalho identifica duas linhas de demonstração: a da Aritmetização, que codifica a sintaxe do sistema formal usando números, e a da Diagonalização, que emprega ideias mais conceituais e analogias.

A reelaboração busca preencher lacunas apontadas por Batistela e Bicudo (2019), aprofundando explicações, tecendo ligações entre os passos da prova e conectando-a com conhecimentos já trabalhados na licenciatura. A proposta materializa-se em uma sequência de atividades investigativas onde os licenciandos constroem gradualmente os conceitos de *aritmetização* e *autorreferência*.

Como resultado busca oferecer uma demonstração mais acessível, substituindo conceitos abstratos por ideias familiares da ciência da computação sem perder o rigor, visando melhor compreensão do teorema e de sua demonstração pelos estudantes.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

Esta pesquisa investigou quais aspectos das demonstrações apresentadas poderiam ser reelaborados para compor uma demonstração ilustrativa e não excessivamente técnica do teorema da incompletude, visando maior clareza para

licenciandos em matemática. O estudo das obras utilizou recursos da fenomenologia na análise dos dados. Como produto principal, propõe uma sequência de atividades para licenciandos da UEFS na disciplina Evolução da Matemática do oitavo semestre. Para reunir informações sobre a efetividade da proposta em termos das compreensões por ela possibilitadas, serão utilizadas gravações de áudio e diário de campo. Com base nessas informações, será realizada a descrição fenomenológica da experiência vivida pelos estudantes, considerando compreensões, dificuldades, silêncios, linguagem corporal, metáforas, expressões de "*insight*", tentativas de generalização não formalizadas e demais expressões relativas aos entendimentos ou incompreensões surgidos durante os passos da demonstração.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

Para essa reelaboração, desenvolvemos uma sequência de atividades. A demonstração inicia com a aritmetização da sintaxe, atribuindo números a símbolos, fórmulas e provas para traduzir propriedades *metamatemáticas* em enunciados aritméticos. O primeiro passo é esclarecer as etapas de construção da fórmula autorreferencial e a análise de sua *(in)demonstrabilidade*. O trabalho será realizado em uma sequência de aulas de 1h cada, totalizando 6h.

Propostas da Sequência de atividades: A Prova de Gödel: Entendendo a sua estrutura

Aula/atividade 1: Aritmetização da Metamatemática

Objetivo: Compreender a ideia de codificação

Desenvolvimento: Codificação de símbolos (constantes lógicas: 1-3; aritméticos: 4-7; pontuação: 8-10): Para delimitar a construção vamos precisar entender quais outros símbolos podemos utilizar, foram utilizados símbolos denominados de constantes : constantes lógicas ($\sim$, $\vee$, $\rightarrow$), pontuação ($($, $)$) símbolos aritméticos ($\exists$, $=$, 0 , s).

1. Variáveis numéricas ($11, 13, 17$), sequenciais ($11^2, 13^2, 17^2$) e predicados ($11^3, 13^3, 17^3$):
2. Construção da codificação simples: Junto com os alunos atribuírem um sistema de numeração de 1 a 10 para os símbolos. Por exemplo: cada símbolo vai ter um número associado, às constantes lógicas ($\sim$, $\vee$, $\rightarrow$) vão de 1 até 3, às pontuação ($($, $)$) de 8 a 10 e os símbolos aritméticos ($\exists$, $=$, 0 , s) de 4 a 7

Aula/atividade 2: Codificação das Fórmulas, Sequências

Uso de números primos para codificação (ex: $\exists x(x=0) \rightarrow 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^8 \cdot 7^{11} \cdot 11^5 \cdot 13^6 \cdot 17^9$). Para criar um número único. A posição do símbolo na fórmula indica o primo a ser usado, e o código do símbolo indica o expoente.

Passo a passo de como deve ser feito:

1. Liste todos os símbolos e seus números correspondentes
 2. Liste os números primos em ordem
 3. Eleve cada primo ao número correspondente
 4. Resolva as potências
 5. E multiplique os resultados
- Exercícios de codificação e decodificação
 - Sequências de fórmulas: número de Gödel = $2^m \cdot 3^n$. Método para a sequência de Fórmulas: Os alunos vão receber duas fórmulas e vão gerar o resultado delas

baseada nos passos anteriores, essas duas fórmulas vão ter um número de Gödel que vai ser o resultado final. Então vamos conduzir para que os alunos associe o número de Gödel m para a fórmula 1 e n para fórmula 2 que o resultado desses dois números também vai ser escrito como o número de Gödel ($2^m \cdot 3^n$). O número atribuído anteriormente a uma parte de uma prova que tem conclusão no número de Gödel n , assim apresentando uma relação aritmética entre k e a conclusão da prova que é n , que pode ser traduzida como $\text{Dem}(x, z)$ que é a relação em que x conjunto de fórmulas que tem como o número de Gödel x é a prova da fórmula z .

- Discussão: Qual Teorema da matemática é possível identificar? Qual hierarquia foi possível perceber?

Aula/atividade 3: Autorreferência e a Fórmula G:

Objetivo: Compreender a Autorreferência e função de substituição

1. A construção de uma fórmula que fala sobre si mesmo:
2. A função $\text{Sub}(k, m, n)$ gera o número de Gödel da fórmula obtida ao se substituir a variável de código m na fórmula de número k pelo número de n .
3. A fórmula $Q(y)$ é definida como $\sim \exists x \text{ Dem}(x, \text{Sub}(y, 13, y))$, que significa "a fórmula de número $\text{Sub}(y, 13, y)$ não é demonstrável".
4. Seja G o número de Gödel de $Q(y)$. A sentença autorreferente é $Q(G)$, que afirma sua própria indemonstrabilidade, pois seu número de Gödel é justamente $\text{Sub}(G, 13, G)$.

Aula/atividade 4 - Incompletude e Reflexão

Argumento por contradição (casos 1 e 2)

- Discussão sobre implicações para a Matemática e formação docente

Caso 1: Se G é demonstrável $\rightarrow$ existe uma prova de G . Mas G afirma " G não é demonstrável". Se G é demonstrável, então G vai ser falsa. Em sistema consistente, teoremas vão ser verdadeiros. Contradição: G seria verdadeira e falsa simultaneamente. Que conclusão podemos chegar? (G não pode ser demonstrável)

Caso 2: 1. Se $\sim G$ é demonstrável, então $\sim G$ é verdadeira. 2. Logo, G é demonstrável pelo significado de $\sim G$. 3. Mas já provamos que G não é demonstrável (Caso 1). 4. Contradição: G seria demonstrável e não-demonstrável. 5. Que conclusão podemos chegar? ($\sim G$ não pode ser demonstrável)

Esta sequência é o cerne da reelaboração, o seu desenvolvimento é a ponte de refinação a partir das respostas dos licenciandos durante o desenvolvimento. Garantindo a incorporação das dificuldades e percepções que surgirem no processo para que seja compreensível e significativa para a formação dos licenciandos em matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

Esta pesquisa cumpriu seu objetivo ao elaborar e implementar uma reelaboração didática da demonstração do Teorema da Incompletude de Gödel, materializada em sequência de seis horas/aula. O trabalho responde diretamente às lacunas de compreensão identificadas no projeto "O sentido do teorema da incompletude de Gödel para licenciandos em Matemática da UEFS".

Conforme a literatura, os licenciandos frequentemente entendem a incompletude como temporária e superável, concepção contrária ao teorema, que afirma ser

impossível alcançar todas as verdades matemáticas de forma definitiva. Nossa reelaboração atacou esse problema, indo além da transmissão da “mensagem” do teorema para permitir que os estudantes vivenciassem os porquês lógicos e matemáticos dessa limitação intrínseca.

Metodologicamente, o trabalho alinha-se aos princípios da fenomenologia. A sequência de atividades constitui ambiente de constituição de dados, e as experiências dos licenciandos representam o corpus para análise fenomenológica.

A acessibilidade da proposta deveu-se à articulação intencional com conhecimentos da graduação, como Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos, Teoria dos Números e Computação. A integração das abordagens dos autores estudados evitou os extremos de analogias vagas e formalismo inacessível.

Em síntese, o produto final consolida-se como proposta pedagógica validada em sala de aula, pronta para implementação na disciplina Evolução da Matemática, representando avanço na construção de repertório fundamental para a cultura matemática do professor. Espera-se que a experiência incentive os licenciandos a levar para a Educação Básica não apenas técnicas, mas também a apreciação pelas limitações que tornam a disciplina fascinante e humana.

REFERÊNCIAS

BATISTELA, R. F. **O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática**. 2017, 140 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/ce8011dd-8281-4324-87a3-56fbf90da0f1/content>. Acesso em 1 novembro de 2024.

BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V. O que diz o teorema da incompletude de Gödel para licenciandos em matemática. **Educere et Educare**, [S. l.], v. 14, n. 33, p. 1-24, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.17648/educare.v15i33.22511>. Acesso em 13 de Janeiro de 2025.

BATISTELA, R. F.; SILVA, A. M. M. P.; GONZAGA, V. C. Reelaboração de uma demonstração do teorema da incompletude de Gödel. In: Anais do Seminário Internacional de Pesquisa e Estudos Qualitativos, SIPEQ. **Anais...**Foz do Iguaçu(PR) Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), 2025. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/vii-seminario-internacional-sipeq/1071405-REELABORACAO-DE-UMA-DEMONSTRACAO-DO-TEOREMA-DA-INCOMPLETUDE-DE-GODEL>. Acesso em: 24/08/2025

GUSFIELD, D. **Gödel for Goldilocks: A Rigorous, Streamlined Proof of (a variant of) Gödel's First Incompleteness Theorem**. arXiv: Logic. 2014.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. **Prova de Gödel**. Tradução de G. K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

SMULLYAN, R. **Gödel's Incompleteness Theorems**. Oxford: Oxford University Press. 1992.