



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº 17.228 de 25/11/2016



PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIX SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS **SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2025**

Teoria Global das Curvas Planas: Teorema dos Quatro Vértices e Desigualdade Isoperimétrica

Pedro Henrique Silva Lima¹; Claudiano Goulart²

1. Pedro Henrique Silva Lima, PIBIC/FAPESB, MATEMÁTICA, e-mail: ph49068@gmail.com

2. Claudiano Goulart, DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS, e-mail: cgoulart@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Diferencial; Desigualdade Isoperimétrica; Teorema dos Quatro Vértices;

INTRODUÇÃO

O presente trabalho aborda a Teoria das curvas planas, com foco na Desigualdade Isoperimétrica e no Teorema dos Quatro Vértices, resultados fundamentais da Geometria Diferencial. O problema isoperimétrico, conhecido desde a Grécia Antiga, questiona qual curva simples e fechada, com comprimento fixo, limita a maior área. Sua solução, o círculo, só foi rigorosamente demonstrada séculos depois, motivando o desenvolvimento do cálculo das variações e influenciando áreas como análise funcional e física matemática. Já o Teorema dos Quatro Vértices afirma que toda curva fechada e convexa possui ao menos quatro pontos de curvatura extrema, estabelecendo uma forte restrição global e conectando-se historicamente ao problema isoperimétrico. O objetivo geral desta pesquisa foi estudar, enunciar e compreender as demonstrações desses dois resultados, revisando conteúdos prévios e aprofundando conceitos da Geometria Diferencial. A escolha se justifica pela relevância teórica e pelo contato antecipado com conteúdos de pós-graduação, fortalecendo a formação acadêmica e a motivação para futuras pesquisas.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A pesquisa foi realizada por meio de uma revisão de literatura, baseando-se nas definições, teoremas e lemas fundamentais apresentados em [2] e [4]. Para auxiliar na compreensão e visualização dos conceitos, recorreu-se à ferramenta GeoGebra para ilustrar algumas curvas, bem como à resolução de exercícios propostos nas obras de referência. O trabalho foi acompanhado por encontros semanais com o orientador para discussão dos temas. Dessa forma, o desenvolvimento do estudo seguiu etapas bem definidas: inicialmente, houve uma retomada de conceitos essenciais de Geometria Analítica, Análise Real e Topologia, usando como material de apoio a referência [3]. Em seguida, partiu-se para o estudo dos fundamentos da Geometria Diferencial, abrangendo tópicos como curvas parametrizadas, vetor tangente, curvatura e o referencial de Frenet. Por fim, a pesquisa aprofundou-se nos resultados clássicos da área e em suas demonstrações, com destaque para a Desigualdade Isoperimétrica e o

Teorema dos Quatro Vértices. As atividades foram realizadas predominantemente nas salas de estudo do Módulo IV da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), complementadas ocasionalmente por reuniões virtuais. A metodologia manteve-se fiel às obras de referência, embora também tenham sido consultadas demonstrações auxiliares em [1] para enriquecer a análise. A consolidação dos resultados deu-se por meio de cálculos formais, comparações com a literatura estabelecida e discussões com o orientador.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

Para compreender a demonstração dos dois teoremas foram usados conceitos da teoria das curvas planas. O primeiro deles é a definição de curva. Uma curva parametrizada diferenciável no plano é uma aplicação $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, que possui derivadas de todos os ordens, e associa a cada parâmetro $t \in (a, b)$ um ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Um exemplo de Curva Parametrizada Diferenciável é o Cardióide, de equação $\alpha(t) = (\cos(t)(2\cos(t) - 1), \sin(t)(2\cos(t) - 1))$, para t em $\mathbb{R}$, representado na Figura 1.

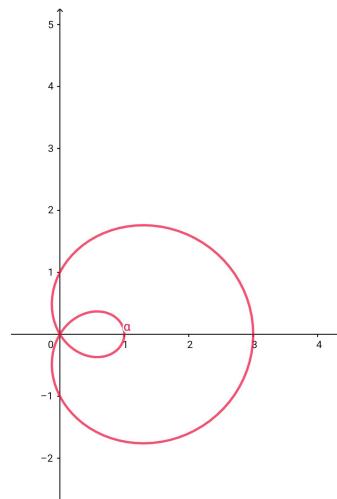


Figura 1: Exemplo de curva diferenciável parametrizada (Cardióide)

O vetor tangente de α em t é definido como $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. Assim, dizemos que α é uma curva regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t no intervalo. Um caso importante de ser observado é o das curvas parametrizadas pelo comprimento de arco (PCA), em que o parâmetro s corresponde à distância percorrida ao longo da curva a partir de um ponto inicial. Pode-se mostrar que uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, seu vetor velocidade é unitário. Além disso, toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

Assim, seja α uma curva P.C.A com parâmetro s . Definimos o vetor tangente unitário como $t(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ e o vetor normal unitário $n(s)$ como o único vetor unitário perpendicular a $t(s)$ que, junto com $t(s)$, forma uma base ortonormal positivamente orientada, ou seja, com a mesma orientação da base canônica de $\mathbb{R}^2$, isto é, $n(s) = (-y'(s), x'(s))$. O par $\{t(s), n(s)\}$ é conhecido como referencial de Frenet. Na Figura 2, pode-se observar o referencial de Frenet do círculo unitário no ponto P.

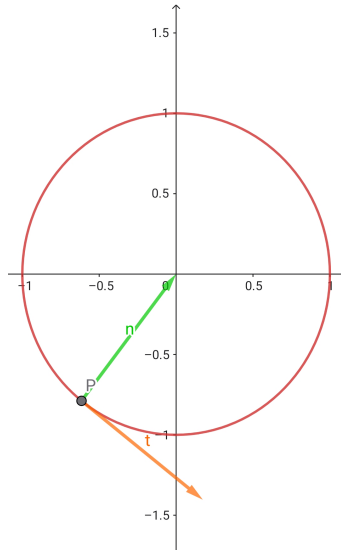


Figura 2: Referencial de Frenet do círculo unitário.

Como $t(s)$ e $n(s)$ são funções diferenciáveis, suas derivadas $t'(s)$ e $n'(s)$ podem ser expressas como combinações lineares desses vetores. E uma vez que $t(s)$ é unitário, sua derivada $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$ e, portanto, paralela a $n(s)$. Definimos portanto a curvatura $k(s)$ da curva em s como o fator de proporcionalidade entre $t'(s)$ e $n(s)$, ou seja:

$$t'(s) = k(s) n(s). \quad (1)$$

De modo análogo, como $n(s)$ também é unitário, sua derivada $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e, conseqüentemente, paralela a $t(s)$. Pode-se mostrar que a relação entre eles é dada por:

$$n'(s) = -k(s) t(s). \quad (2)$$

Essas duas equações, conhecidas como fórmulas de Frenet, descrevem a variação do referencial ao longo da curva e são fundamentais para o estudo da geometria diferencial de curvas planas. Com esses e outros resultados do Cálculo Diferencial e Integral foi possível estudar, com detalhes, a demonstração dos seguintes resultados:

i) Seja C uma curva parametrizada regular $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, simples (sem auto-interseções) e fechada (α e todas as suas derivadas coincidam em a e b) com perímetro l . Considere a área A da região limitada por C . Dessa forma:

$$l^2 - 4\pi A \geq 0. \quad (3)$$

e a igualdade verifica-se se, e somente se, C é um círculo.

ii) O Teorema dos Quatro Vértices afirma que uma curva simples, fechada e convexa (para todo $t \in [a, b]$, o traço $\alpha([a, b])$ de α está totalmente contido em um lado do semi-plano fechado determinado pela reta tangente em t) tem pelo menos quatro vértices.

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

O estudo desenvolvido permitiu compreender dois resultados centrais da Geometria Diferencial: a Desigualdade Isoperimétrica e o Teorema dos Quatro Vértices. O primeiro mostra que, entre todas as curvas fechadas de mesmo perímetro, o círculo é a que abrange a maior área. O segundo garante que toda curva simples, fechada e

convexa possui pelo menos quatro vértices. Extensões dos teoremas que podem ser estudadas futuramente são a desigualdade isoperimétrica de Bonnesen e a formulação do Teorema dos Quatro Vértices para curvas de Jordan regulares. Além disso, a recíproca do Teorema dos Quatro Vértices assegura que, dada uma função contínua e periódica com dois máximos e dois mínimos locais em um período, é possível construir uma curva de Jordan cuja curvatura corresponde a essa função, o que também é um resultado interessante que pode ser futuramente analisado. Dessa forma, evidencia-se a relevância desses teoremas, não apenas por sua importância teórica, mas também pelas possibilidades de generalização e aprofundamento que oferecem ao estudo das curvas planas. Assim, a pesquisa atingiu seu objetivo de consolidar conhecimentos fundamentais da Geometria Diferencial, ao mesmo tempo em que proporcionou contato com conteúdos típicos da pós-graduação e estimulou a motivação para investigações futuras.

REFERÊNCIAS

- [1] Alencar, H.; Santos W.; Neto, S. G. (2020), “Geometria diferencial de curvas no $\mathbb{R}^2$ ” – Rio de Janeiro: SBM, 419 p. (Coleção Coletâneas de Matemática)
- [2] Do Carmo, M. C. (2006), “Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies”, 2ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 608 p.
- [3] Lima, E. L. (1996), “Análise Real, vol. 1”, Rio de Janeiro: IMPA/CNPq, 216 p.
- [4] Tenenblat, K. (2008), “Introdução à Geometria Diferencial”, 2ª ed. revisada, São Paulo: Blucher, 280 p.