



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76

Recredenciamento pelo Decreto nº 17.228 de 25/11/2016



PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIX SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2025

*-Limpeza em Anéis de Grupo sobre Quatérnios e Diedrais

Micaelle Souza Alcântara¹; Edward Landi Tonucci²

¹ Micaelle Souza Alcântara, PIBIC/FAPESB, MATEMÁTICA, e-mail: micaellealcantara022@gmail.com

² Edward Landi Tonucci, DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS, e-mail: eltonucci@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Grupos SLC; *-Limpeza em Anéis de Grupo; Quatérnios e Diedrais.

Introdução

O ambiente de estudo deste trabalho são os anéis de grupo, estruturas algébricas que combinam as propriedades de grupos e anéis, sendo utilizados em diversas áreas da álgebra abstrata. Assim, seja G um grupo e R um anel comutativo com unidade. O anel de grupo RG é o conjunto das combinações lineares $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$, onde $a_g \in R$ sendo que apenas um número finito desses coeficientes a_g é diferente de zero. As operações em RG são definidas por:

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g, \quad \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) = \sum_{g, h \in G} (a_g b_h) (gh).$$

Dentro desse contexto, um problema relevante é o da caracterização da limpeza e *-limpeza em anéis de grupos, conceitos estes que envolvem a decomposição de elementos do anel como a soma de uma unidade com idempotente. Para isso, começamos definindo conceitos fundamentais. Seja G um grupo, uma involução em G é uma aplicação $*$: $G \rightarrow G$ que satisfaz, para todos $g, h \in G$,

1. $(gh)^* = h^* g^*$,
2. $(g^*)^* = g$.

Todo grupo G admite uma involução, chamada involução clássica, que associa a cada elemento o seu inverso. Entretanto, existe uma família especial de grupos que, além dessa involução clássica, admite outra involução, a chamada classe dos SLC-grupos. Para introduzir os SLC-grupos, precisamos primeiro definir os LC-grupos. Dizemos que um grupo G não abeliano é um LC-grupo (comutatividade limitada) se, para quaisquer $x, y \in G$ que comutam ($xy = yx$), temos que x, y ou xy pertencem ao centro de G , denotado $\mathcal{Z}(G)$. Se G é um LC-grupo com único comutador não trivial s , dizemos que G é um SLC-grupo. De acordo com o Teorema 3.3

de Vaš (2010), a involução canônica dos SLC-grupos é dada por

$$x^* = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathcal{Z}(G), \\ sx, & \text{se } x \notin \mathcal{Z}(G). \end{cases}$$

Com base em Chen, Gao e Li (2015) a involução clássica de um grupo qualquer é dada por

$$x^* = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathcal{Z}(G), \\ x^{-1}, & \text{se } x \notin \mathcal{Z}(G). \end{cases}$$

Nesse sentido, mostramos que o grupo dos quatérnios, Q_8 , é um SLC-grupo, no qual as involuções clássica e canônica coincidem, ou seja, são a mesma involução. Já o diedral D_4 é um SLC-grupo, que possui a involução clássica e canônica, no entanto, são distintas.

A limpeza em anéis tem sido estudada para entender como elementos podem ser decompostos em soma de unidade e idempotente. Isto é, dado um anel comutativo com unidade R , dizemos que R é limpo se, para todo $r \in R$, existe uma unidade $u \in \mathcal{U}(R)$ e um idempotente $e \in R$ (com $e^2 = e$) tal que $r = u + e$. Segundo Chen, Gao e Li (2015), o conceito de $*$ -limpeza para anéis com involução $*$ foi introduzido por Vaš (2010), que é um tipo específico da limpeza de anéis. Daí, dado um anel R comutativo com unidade, dizemos que R é $*$ -limpo se, para todo $r \in R$, existe $u \in \mathcal{U}(R)$ e projeção p tal que $r = u + p$.

Diante do exposto, diversos pesquisadores têm se dedicado a estudar a $*$ -limpeza em anéis de grupos com a involução clássica, como observado em Chen, Gao e Li (2015). Neste trabalho, investigamos a $*$ -limpeza dos anéis de grupo RQ_8 e RD_4 , onde Q_8 e D_4 são grupos SLC. Nosso objetivo principal foi mostrar que, dado um anel comutativo R com $2 \in \mathcal{U}(R)$, o anel de grupo RD_4 não é $*$ -limpo. Além disso, para um anel comutativo local ou domínio de integridade R com $2 \in \mathcal{U}(R)$, apresentamos condições necessárias e suficientes para que RQ_8 seja $*$ -limpo.

A justificativa desta pesquisa decorre do fato de que os materiais disponíveis sobre o tema, em sua maioria, apresentam demonstrações com passagens matemáticas não triviais, como ocorre em Almeida *et al.* (2025). Nesse contexto, nosso objetivo foi detalhar essas demonstrações e disponibilizar um material complementar sobre o assunto. Além disso, a importância do estudo da $*$ -limpeza em anéis de grupos está relacionada à análise de casos mais gerais, para os quais a $*$ -limpeza do anel de grupo RQ_8 serve como hipótese fundamental.

Material e Métodos

Por se tratar de uma pesquisa de caráter teórico, a metodologia adotada consistiu em encontros semanais destinados à discussão, sistematização e aprofundamento das preliminares necessárias ao entendimento do problema. A pesquisa foi desenvolvida entre 01/10/2024 e 30/09/2025, sendo estruturado em diferentes etapas.

Na primeira etapa foi realizado um levantamento bibliográfico com foco no artigo de Chen, Gao e Li (2015) e nos resultados apresentados em Almeida *et al.* (2025) e Vaš (2010), além da consulta a referências adicionais sobre propriedades algébricas dos grupos dos Quatérnios (Q_8) e Diedral (D_4). Em seguida, estudamos as propriedades estruturais desses grupos, caracterizando-os como SLC-grupos e analisando suas respectivas involuções canônicas.

A segunda etapa foi dedicada ao estudo dos anéis de grupos RG , com ênfase no estudo de unidades, idempotentes e na extensão linear de uma involução definida em G para o anel RG . Esse estudo serviu de base para a análise da $*$ -limpeza em RQ_8 e RD_4 . No caso do grupo dos Quatérnios Q_8 , o desenvolvimento foi conduzido a partir do Teorema 3.8 de Chen, Gao e Li (2015), cuja demonstração da $*$ -limpeza para foi detalhada e reorganizada. Para o grupo Diedral D_4 , a análise seguiu tópicos relacionados ao Teorema 5.2 de Almeida *et al.* (2025), investigando as condições em que o anel de grupo RD_4 não é $*$ -limpo.

Já a etapa final foi dedicada a redação do trabalho final e relatório final. Dado o exposto, destaco que os encontros semanais desempenharam um papel importante durante a pesquisa, pois possibilitaram a discussão dos resultados parciais, a validação dos argumentos desenvolvidos e a reformulação das demonstrações, apresentadas de maneira mais detalhada e passo a passo.

Resultados e Discussão

A partir das definições e propriedades preliminares discutidas na introdução, analisamos o caso do anel de grupo RD_4 . Demonstramos que, quando R é um anel comutativo com $2 \in \mathcal{U}(R)$, o anel de grupo RD_4 não é $*$ -limpo. Esse resultado decorre da análise estrutural do anel, que evidencia que nem todo elemento de RD_4 pode ser escrito como a soma de uma unidade e uma projeção $*$ -invariante. Assim, concluímos que o grupo diedral D_4 não possui a propriedade de $*$ -limpeza no anel de grupo.

Para demonstrar o resultado, utilizamos um argumento por redução ao absurdo, baseado na decomposição do anel de grupo em componentes. Em particular, temos

$$RG = (RG)_e \oplus (RG)_f,$$

onde e é um idempotente central, $f = 1 - e$ e $ef = 0$. Além disso, RG é $*$ -limpo se, e somente se, ambas as componentes $(RG)_e$ e $(RG)_f$ forem $*$ -limpas. Mostramos que uma dessas componentes, a saber $(RD_4)_f$, não é $*$ -limpa. De fato, supomos o contrário. Nesse caso, qualquer elemento $h \in (RD_4)_f$ poderia ser escrito na forma $h = u + p$, com $u \in \mathcal{U}((RD_4)_f)$ e $p \in \text{Proj}((RD_4)_f)$. Assim, seria possível fabricarmos um elemento $h \in (RD_4)_f$ tal que tenhamos a relação $h - p = u$ com $u \in \mathcal{U}((RD_4)_f)$ e, a partir disso, determinar um outro elemento $v \neq 0$ tal que $u \cdot v = 0$. Isso levaria à contradição de que u seria um divisor de zero, o que é impossível, pois $u \in \mathcal{U}((RD_4)_f)$. Portanto, concluímos que $(RD_4)_f$ não é $*$ -limpo e,

consequentemente, RD_4 também não é $*$ -limpo.

Por outro lado, no caso do anel de grupo RQ_8 , obtivemos condições necessárias e suficientes para a $*$ -limpeza. De acordo com Teorema 3.8 de Chen, Gao e Li (2015), temos as seguintes condições para um anel unitário comutativo R com $2 \in \mathcal{U}(R)$:

- Se RQ_8 é $*$ -limpo, então a equação $X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = 0$ não possui soluções em R .
- Se RQ_8 é limpo e a equação $X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = 0$ não possui soluções em R , então:
 - a) Se R é um domínio de integridade, então RQ_8 é $*$ -limpo;
 - b) Se R é um anel local, então RQ_8 é $*$ -limpo.

Dessa forma, enquanto RD_4 não possui a propriedade de $*$ -limpeza, o grupo quatérnios Q_8 permite caracterizações precisas para a $*$ -limpeza de RQ_8 .

Considerações Finais

Nesta pesquisa, estudamos a $*$ -limpeza em anéis de grupos sobre os SLC-grupos dos Quatérnios (Q_8) e Diedral (D_4). Mostramos que, embora ambos os grupos compartilhem características estruturais comuns, seus anéis de grupo apresentam comportamentos distintos: RQ_8 pode ser $*$ -limpo, enquanto RD_4 não é $*$ -limpo em condições gerais. O principal mérito desta pesquisa está na organização e detalhamento das demonstrações encontradas na literatura, em especial nos trabalhos Almeida *et al.* (2025) e Chen, Gao e Li (2015), tornando os argumentos mais acessíveis para estudantes de graduação. Assim, este trabalho fornece um material de apoio que pode ser útil para futuros estudos em álgebra, em particular no contexto da teoria de anéis de grupos com involução.

Referências

- [1] ALMEIDA, K.; CINTRA, J. C.; FERREIRA, M. A.; TONUCCI, E. L. *On $*$ -clean group rings over SLC-groups*. Comm. Alg. 53(11):4844-4857 (2025).
- [2] CHEN, J.; GAO, Y.; LI, Y. *Some $*$ -Clean Group Rings*. Algebra Colloquium, Vol. 22 (2015).
- [3] GOODAIRE, E. G.; JESPERS, E.; POLCINO MILIES, C. *Alternative Loop Rings*. Elsevier, Vol. 184 (1996).
- [4] POLCINO MILIES, C.; SEHGAL, S. K. *An Introduction to Group Rings*, Dordrecht Boston: Kluwer Academic Publishers, (2002).
- [5] VAŠ, L. *$*$ -Clean rings; some clean and almost clean Baer $*$ -rings and von Neumann algebras*. J. Algebra 324:3388-3400 (2010).