UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXVIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2024

ESTUDANDO LIMPEZA E R-LIMPEZA EM ANÉIS

Arleane Gleice de Sousa Bispo[1] e Jacqueline Costa Cintra[2]

[1]Bolsista FAPESB, Graduanda em Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: arleanebispofsa@gmail.com
[2]Orientadora, DEXA, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: jccintra@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Anéis, Anéis Limpos, Anéis R-Limpos.

INTRODUÇÃO

O conceito de anéis limpos foi introduzido por W. Keith Nicholson em 1977, um matemático renomado na área da álgebra abstrata. Ele definiu um anel como limpo se cada elemento pode ser expresso como a soma de um elemento inversível e um idempotente desse anel. Em 1999, Nicholson expandiu essa teoria para anéis fortemente limpos, e, em 2001, junto a Juncheol Han, apresentou a extensão do conceito de limpeza para anéis importantes como os de polinômios e matrizes. Mais recentemente, em 2013, Nahid Ashrafi e Ebrahim Nasibi apresentaram os anéis r-limpos, nos quais cada elemento é a soma de um elemento regular e um idempotente desse anel, demonstrando que, em anéis abelianos, as propriedades de limpeza e r-limpeza são equivalentes.

Nesta investigação, exploramos alguns resultados sobre anéis limpos e r-limpos, analisando suas definições e propriedades. Investigamos como os elementos podem ser possivelmente expressos em relação a elementos inversíveis, idempotentes e regulares, além das implicações dessas definições em estruturas algébricas. Também examinamos a relação entre anéis limpos e r-limpos, onde todo limpo é r-limpo, mas a recíproca nem sempre é verdadeira; dessa forma, iremos destacar algumas condições para que um anel r-limpo também seja limpo, como por exemplo, anéis abelianos e anéis sem divisores de zero. Essas investigações são essenciais para compreender as interações entre os conceitos estudados, contribuindo para aprofundar o conhecimento da estrutura dos anéis, através de relevantes resultados para a teoria em questão.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A pesquisa teve caráter teórico. Inicialmente, foi realizado um levantamento da bibliografia relevante sobre os conceitos de limpeza e r-limpeza em anéis. Estudamos exemplos específicos de anéis limpos e r-limpos, aprofundando nossa compreensão. Investigamos os principais resultados relacionados a esses anéis, incluindo algumas condições e propriedades que asseguram a limpeza ou r-limpeza. Por fim, analisamos a relação entre anéis limpos e r-limpos, destacando que todo anel limpo é r-limpo, mas a recíproca não é verdadeira, o que motivou nosso estudo sobre algumas condições necessárias para que um anel r-limpo seja limpo.

Para fundamentar a investigação, revisitamos conceitos fundamentais da teoria de anéis, como anéis, ideais, elementos regulares, inversíveis, idempotentes, subanéis e homomorfismos. Essas estruturas algébricas obedecem a propriedades específicas que permitem compreender de que forma a limpeza e a r-limpeza se preservam ou se modificam em diferentes contextos, fornecendo uma base sólida para analisar suas características e as condições que influenciam sua aplicabilidade e transformação.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

Definição 1. Seja A um anel. Um elemento $x \in A$ é dito limpo se pode ser escrito como a soma de um idempotente e um elemento inversível de A. Ou seja, x é limpo se:

$$x = u + e, \text{ onde } u \in U(A);\, e \in Id(A).$$

Diremos que A é limpo se todos os seus elementos são limpos.

Unidades e idempotentes são limpos e, assim, todo corpo é um anel limpo. Já o anel $\mathbb{Z}$ não é limpo ($3 = 0 + 3$ ou $3 = 1 + 2$, logo não conseguimos uma decomposição de acordo à definição).

O teorema a seguir estabelece que qualquer imagem homomórfica de um anel limpo é, também, um anel limpo. Esse resultado é fundamental, pois assegura que as propriedades de limpeza se preservam sob homomorfismos, permitindo a transferência de resultados entre anéis e facilitando a análise de estruturas algébricas mais complexas.

Teorema 2. Qualquer imagem homomórfica de um anel limpo é também um anel limpo.

Corolário 3. Todo anel quociente de um anel limpo é um anel limpo.

Esse resultado é importante porque, com base no teorema anterior, a limpeza se preserva em imagens homomórficas. Como um anel quociente $\frac{A}{I}$ é a imagem de um epimorfismo $f : A \longrightarrow \frac{A}{I}$, podemos afirmar que, se A é limpo, então $\frac{A}{I}$ também o é. Isso permite a aplicação do conceito de limpeza em contextos mais amplos na teoria dos anéis.

Teorema 4. Se A é um anel comutativo, então o anel de polinômios $A[x]$ não é limpo.

Esse teorema apresenta um importante resultado sobre a estrutura dos anéis de polinômios, evidenciando que a propriedade de limpeza não se mantém nesse contexto.

Teorema 5. O anel A[[x]] é limpo se, e somente se, A é limpo.

Este teorema estabelece uma equivalência entre a limpeza do anel de séries formais A[[x]] e a do anel base A, permitindo que a análise da propriedade de limpeza em A[[x]] seja reduzida à investigação de A.

Proposição 6. Um anel comutativo regular é um anel limpo.

Definição 7. Seja A um anel. Um elemento $x \in A$ é dito r-limpo se o mesmo pode ser escrito como a soma de um elemento regular e um idempotente de A. Ou seja, x é r-limpo se:

$$x = r + e, \text{ onde } r \in Reg(A); e \in Id(A).$$

Diremos que A é r-limpo se todos os seus elementos são r-limpos.

Exemplos de elementos r-limpos incluem elementos inversíveis, regulares e idempotentes. Temos também que o anel $\mathbb{Z}$ não é r-limpo (mesmo contraexemplo dado anteriormente).

Teorema 8. Seja A um anel com idempotentes apenas triviais. Se A é r-limpo, então seu centro C(A) também é r-limpo.

Nota-se que, com este resultado, demonstrado por Asharafi e Nasibi em [2], o centro de anéis r-limpos não são necessariamente r-limpos. E, ainda, a mesma situação ocorre para anéis limpos, conforme foi demonstrado por Burgess e Raphael em [3].

Os resultados sobre r-limpeza em anéis revelam semelhanças com os de anéis limpos, destacando que propriedades de preservação em homomorfismos e quocientes se aplicam a ambos. A seguir, apresentamos alguns resultados relevantes que foram estudados.

Proposição 9. Qualquer imagem homomórfica de um anel r-limpo é também um anel r-limpo.

Corolário 10. Todo anel quociente de um anel r-limpo é também um anel r-limpo.

Teorema 11. . Se A é um anel comutativo, então A[x] não é r-limpo.

Teorema 12. Se o anel de séries de potências formais A[[x]] é r-limpo, então A é r-limpo.

No contexto do Teorema 12, vale mencionar que a recíproca não é sempre verdadeira de forma geral. Contudo, é relevante comentar que existem condições específicas sobre o anel A que garantem a validade da recíproca. Essa situação é abordada em um resultado posterior, onde se demonstra que, sob certas características de A, a r-limpeza pode ser estendida para o anel de séries de potências formais A[[x]].

Uma observação importante é que todo anel limpo é r-limpo, mas a recíproca nem sempre é verdadeira. Ashrafi e Nasibi, em [1], apresentam um exemplo de um anel r-limpo que não é limpo, conhecido também como o Exemplo de Bergman. Os teoremas a seguir mostram a relação entre r-limpeza e limpeza em anéis, demonstrando que, sob certas condições, a r-limpeza implica a limpeza. E, ainda, em alguns dos resultados temos a relevância na estrutura dos idempotentes do anel, pois ao satisfazerem certas propriedades temos a garantia de um anel r-limpo também ser um anel limpo.

Teorema 13. Seja *A* um anel com apenas idempotentes triviais. Se A é r-limpo, então *A* é limpo.

Teorema 14. Se *A* é um anel comutativo em que cada par de idempotentes é ortogonal e *A* é r-limpo, então A é limpo.

Teorema 15. Seja *A* um anel abeliano. Se *A* é r-limpo, então A é limpo.

Corolário 16. Seja *A* um anel abeliano. Se *A* é r-limpo, então *A*[[x]] é r-limpo.

Esse resultado garante a recíproca do Teorema 12 no caso específico de anéis abelianos, estendendo a propriedade de r-limpeza de *A* para *A*[[x]].

Teorema 17. Seja *A* um anel sem divisores de zero. Se *A* é r-limpo, então *A* é limpo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

Este trabalho explorou a inter-relação entre os conceitos de limpeza e r-limpeza em anéis, elucidando como as condições impostas sobre a estrutura dos anéis influenciam suas características algébricas. O estudo desses conceitos e a investigação de suas relações contribuem para um conhecimento mais abrangente sobre a estrutura de anéis. A pesquisa revelou a conexão entre essas propriedades, mostrando como as características estruturais afetam o comportamento algébrico. Através deste estudo, foi possível apreciar a beleza e a complexidade da álgebra, despertando um interesse renovado por investigações futuras neste campo fascinante.

REFERÊNCIAS

[1]. ASHRAFI, N.; NASIBI, E. r-Clean rings. Mathematical Reports, v.15(65), n.2, p. 125 - 132, 2013.
[2]. ASHRAFI, Nahid; NASIBI, Ebrahim. Rings in which elements are the sum of an idempotent and a regular element. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, v. 39, n. 3, p. 579-588, 2013.
[3]. BURGESS,W.D.; RAPHAEL,R. On Embedding rings in clean rings Communications in Algebra, v.41, 2013.
[4]. CHEN, W. On clean rings and clean elements. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, v. 32, p. 0-6, 2008.
[5]. FONSECA, Alessandra Cunha. Anéis limpos e r-limpos. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2021.
[6]. NICHOLSON, W. Keith. Strongly clean rings and Fitting's lemma. Communications in Algebra, v. 27, n. 8, p. 3583-3592, 1999.